Année académique 2025-2026
Semestre I
Analyse
Niveau II

Ecole Sup-Prépa
Sis à Nkolfoulou (Route de Soa)
BP 8241 Yaoundé www.sup-prepa.net

Introduction aux séries de Fourier

Table des matières

1 Introduction et motivation **2**
1.1 Pourquoi les séries de Fourier ? . . . 2

2 Fonctions périodiques et continuité par morceaux **2**
2.1 Définitions fondamentales . . . 2
2.2 Propriétés des intégrales de fonctions périodiques . . . 2

3 Series de Fourier **3**
3.1 Les coefficients de Fourier . . . 3
3.1.1 Relations entre coefficients . . . 3
3.1.2 Exemples de calcul . . . 3
3.1.3 Propriétés de symétrie . . . 4
3.2 Serie de Fourier . . . 4

4 Theoremes de convergence **5**
4.1 Théorème de Dirichlet . . . 5
4.1.1 Exemples d'application . . . 5
4.2 Convergence uniforme . . . 5
4.3 Convergence en moyenne quadratique . . . 5
4.3.1 Exemple d'application . . . 6
4.4 Inégalité de Bessel . . . 6

5 Exercices **6**
5.1 Exercice 1 : Calcul de coefficients . . . 6
5.2 Exercice 2 : Fonction triangulaire . . . 7
5.3 Exercice 3 : Fonction polynomiale . . . 7
5.4 Exercice 4 : Méthode de la dérivation . . . 7
5.5 Exercice 5 : Signal redressé . . . 7

1 Introduction et motivation

1.1 Pourquoi les séries de Fourier ?

Les séries de Fourier permettent de décomposer une fonction périodique en une somme de fonctions trigonométriques simples (sinus et cosinus). Cette décomposition est fondamentale pour :

- **L'analyse des signaux** : traitement du son, des images
- **La résolution d'équations différentielles** : équation de la chaleur, des ondes
- **La physique** : étude des circuits électriques RLC
- **Les mathématiques** : calcul de sommes de séries

Exemple de signal périodique : Considérons un circuit RLC alimenté par une tension $s(t)$ périodique. L'équation différentielle est :

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = s(t)$$

Si $s(t)$ est sinusoïdal ($s(t) = \sin(\omega t)$), on sait trouver une solution particulière de la forme $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$. Mais si $s(t)$ est un signal carré ou triangulaire, on utilise les séries de Fourier.

2 Fonctions périodiques et continuité par morceaux

2.1 Définitions fondamentales

Définition 1 (Fonction périodique)**.** Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est **périodique de période** $T > 0$ si :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x)$$

La plus petite période positive T_0 s'appelle la **période fondamentale**. La **pulsation** associée est $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Définition 2 (Continuité par morceaux)**.** Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ telle que :

1. f est continue sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$
2. f admet des limites finies à gauche et à droite en chaque x_i

On note $f(x_i^+)$ la limite à droite et $f(x_i^-)$ la limite à gauche.

Exemple 1 : La fonction $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (partie entière) est continue par morceaux sur tout intervalle.

Exemple 2 : La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$ car la limite en 0 n'est pas finie.

2.2 Propriétés des intégrales de fonctions périodiques

Proposition 1. Soit f une fonction périodique de période T, continue par morceaux. Alors :

1. $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,dx$ ne dépend pas de a
2. $\displaystyle\int_0^T f(x)\,dx = \int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx$

3 Series de Fourier

3.1 Les coefficients de Fourier

Définition 3 (Coefficients de Fourier)**.** Soit f une fonction périodique de période T, continue par morceaux. On définit :

Coefficients réels :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt \quad \text{(valeur moyenne)} \tag{1}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \quad n \geq 1 \tag{2}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt, \quad n \geq 1 \tag{3}$$

Coefficients complexes :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

3.1.1 Relations entre coefficients

Proposition 2. Les coefficients réels et complexes sont liés par :

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0 \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n \geq 1 \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

et inversement :

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}) \end{aligned}$$

3.1.2 Exemples de calcul

Exemple : Fonction créneau

Soit f de période 2π définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

Calcul des coefficients :

- $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\,dt = \frac{1}{2}$
- $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(nt)\,dt = 0$
- $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nt)\,dt = \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi}$

Donc $b_{2p} = 0$ et $b_{2p+1} = \frac{2}{(2p+1)\pi}$.

Exemple : Fonction dent de scie (paire)

Soit f paire, de période 2π, définie par $f(t) = \pi - |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

Comme f est paire, $b_n = 0$. Calculons a_n :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi - |t|)\,dt = \frac{\pi}{2}$$
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt = \frac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}$$

Donc $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$.

3.1.3 Propriétés de symétrie

Proposition 3 (Effet de la parité)**.** On a :

1. Si f est **paire** : $b_n = 0$ pour tout $n \geq 1$, et

$$a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$$

2. Si f est **impaire** : $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, et

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

Exemple : La fonction $f(t) = t$ sur $[-\pi, \pi]$, prolongée par périodicité, est impaire. Donc $a_n = 0$ et :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t\sin(nt)\,dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$$

3.2 Serie de Fourier

On a l'égalité :

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin n\omega t.$$

Cette quantité est notée $S_N[f(t)]$ et la série de Fourier de la fonction f est la série dont les sommes partielles sont les $S_N(f)$, autrement dit la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$$

ou sa variante réelle ou sa variante réelle

$$\sum_{n\geq 0} a_n \cos n\omega t + \sum_{n\geq 1} b_n \sin n\omega t.$$

Il s'agit en fait d'une serie de fonction $\sum h_n$ avec

$$h_n(t) = a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t.$$

On peut remarquer que pour $n = 0$, $\sin 0\omega t = \sin 0 = 0$. Par consequent, b_0 n'intervient pas dans l'expression d'une serie de Fourier. Effectuer son calcul s'avere donc inutile.

Ainsi, une série de Fourier est une série de fonction $\sum h_n$ avec $h_n \quad t \mapsto a_n \cos n\omega t + \sum_{n\geq 1} b_n \sin n\omega t$ où les coefficients a_o, a_n et b_n $(n \geq 1)$ sont obtenus respectivement par les formules (1), (2) et (3).

4 Theoremes de convergence

4.1 Théorème de Dirichlet

Théorème 1 (Dirichlet)**.** Soit f une fonction périodique de période T, de classe C^1 par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)] = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

où $f(x^+)$ est la limite à droite et $f(x^-)$ la limite à gauche.

Remarque 1.
1. Si f est continue en x, alors $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$
2. Aux points de discontinuité, la série converge vers la moyenne des limites
3. La convergence est **ponctuelle**, pas nécessairement uniforme

4.1.1 Exemples d'application

Application au créneau : Pour la fonction créneau précédente, en $t = \frac{\pi}{2}$ (point de continuité) :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)$$

Or $\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p$, donc :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}$$

C'est la formule de Leibniz pour arctan(1).

4.2 Convergence uniforme

Théorème 2. Si f est continue, périodique, et de classe C^1 par morceaux, alors la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exemple : La fonction dent de scie est continue et C^1 par morceaux, donc sa série de Fourier converge uniformément. En revanche, le créneau n'est pas continu, donc la convergence n'est pas uniforme (phénomène de Gibbs).

4.3 Convergence en moyenne quadratique

Théorème 3 (Parseval)**.** Soit f une fonction périodique de période T, continue par morceaux (ou plus généralement de carré intégrable). Alors :

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_N f(t)|^2\,dt = 0.$$

De manière équivalente, on a l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2.$$

Une reformulation du théorème precedent est la suivante :

Théorème 4 (Parseval)**.** Soit f une fonction périodique de période T, continue par morceaux. Alors :

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Remarque 2. La convergence en moyenne quadratique est plus faible que la convergence uniforme, mais elle est vérifiée pour une large classe de fonctions (celles de carré intégrable).

4.3.1 Exemple d'application

Application de Parseval au créneau : Pour la fonction créneau, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 1\,dt = \frac{1}{2}$$

Et par Parseval :

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{(2p+1)\pi}\right)^2$$

Donc :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Et comme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, on trouve :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4.4 Inégalité de Bessel

Corollaire 1 (Inégalité de Bessel)**.** Pour toute fonction f périodique, continue par morceaux :

$$|a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt$$

5 Exercices

5.1 Exercice 1 : Calcul de coefficients

Soit f la fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < \pi \\ 0 & \text{si } \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f sur $[-2\pi, 4\pi]$. 2. Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n. 3. Écrire le développement en série de Fourier de f. 4. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5.2 Exercice 2 : Fonction triangulaire

Soit f la fonction paire, périodique de période 2π, définie par $f(t) = |t|$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f. 2. En déduire le développement en série de Fourier de f. 3. Appliquer le théorème de Dirichlet en $t = 0$ pour trouver $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$. 4. Appliquer la formule de Parseval pour trouver $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$.

5.3 Exercice 3 : Fonction polynomiale

Soit f la fonction paire, périodique de période 2π, définie par $f(t) = t^2$ pour $t \in [-\pi, \pi]$.

1. Montrer que f est continue et C^1 par morceaux. 2. Calculer les coefficients de Fourier de f. 3. En déduire les valeurs de :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

4. Appliquer Parseval pour trouver $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.

5.4 Exercice 4 : Méthode de la dérivation

Soit f la fonction impaire, périodique de période 2π, définie par $f(t) = t(\pi - t)$ pour $t \in [0, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f par intégration directe. 2. Calculer les coefficients de Fourier de f' et vérifier la relation $c_n(f') = in\, c_n(f)$. 3. Retrouver les coefficients de f à partir de ceux de f'. 4. En déduire $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}$.

5.5 Exercice 5 : Signal redressé

Soit f la fonction paire, périodique de période 2π, définie par $f(t) = |\sin t|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier de f. 2. En déduire le développement en série de Fourier de f. 3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$.